

2024 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 高等代数

第 1 页共 2 页

一、(60 分, 每小题 6 分) 判断对错并简述理由.

1. 设 $f(x)$ 是一元实系数多项式, 且 $1+3i$ 为 $f(x)$ 的根, 那么 $(x^2-2x+10)|f(x)$.

$$2. \text{行列式} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n!.$$

3. 可逆矩阵可以表示成若干个初等矩阵的乘积.

4. 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 且表示法是唯一的, 那么 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则二次型 $f = X^T A X$ 是正定的.

6. 设非齐次线性方程组 $A X = b$, 若其导出组 $A X = 0$ 的解唯一, 那么 $A X = b$ 的解也是唯一的.

7. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_s 都是线性空间 V 中的向量, 生成空间 $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_s)$,

则向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_s 等价.

8. 如果 σ 是可逆的线性变换, λ 为 σ 的特征值, 那么 λ 一定不为零.

9. 设线性空间 V , 且 V_1, V_2, V_{11}, V_{12} 是 V 的子空间, 若 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$, 那么

$$V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2.$$

10. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是三维欧氏空间 V 的一组标准正交基, 那么 $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 V 的一组基, 但不是 V 的一组标准正交基.

二、(10 分) 设 $f(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$, 求 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 的充要条件.

2024 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 高等代数

第 2 页共 2 页

三、(10 分) 计算 $n+1$ 阶行列式
$$\begin{vmatrix} x_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n+1} \end{vmatrix}, \text{ 其中 } x_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n+1.$$

四、(8 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = 0$, 证明: $A = 0$.

五、(8 分) 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 A^* , 且满足 A 的秩 $R(A) = n-1$, 求矩阵 A^* 的秩 $R(A^*)$.

六、(10 分) 问: 参数 a, b 取何值时, 下列线性方程组有解? 当方程组有解时, 求其通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + (a+3)x_3 + 3x_4 = b \end{cases}$$

七、(10 分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 2, 1)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (2, 1, 5, 6)$,

求由该向量组生成的子空间的基与维数.

八、(12 分) 在 n 维线性空间中, 设有线性变换 σ 与向量 ξ , 使得 $\sigma^{n-1}(\xi) \neq 0$, 但 $\sigma^n(\xi) = 0$,

证明: σ 在某组基下的矩阵是
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

九、(12 分) 利用正交变换化下列二次型为标准形:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

十、(10 分) 设 A 为 n 阶对合矩阵, 即满足 $A^2 = E$, 证明: A 等价于矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & \\ & -E_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中

$$r = R(A + E).$$